Homología Singular y Celular:

Defensa de TFG

Rubén Izquierdo López
Supervisado por Manuel Alonso Morón

Universidad Complutense de Madrid

12 de Julio de 2023

1. Homología Singular

1. Homología Singular

Objetivo: asignar a cada espacio topológico una sucesión de grupos $H_n(X)$, $n \geq 0$ representando los agujeros n-dimensionales del espacio.

1.1 Los grupos de Homología Singular

Definición 1.1 (n-símplice canónico)

*Definimos el n-**símplice canónico**, Δ^n, como la envoltura convexa de $\{e_0, \ldots, e_n\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

1.1 Los grupos de Homología Singular

Definición 1.1 (n-símplice canónico)

*Definimos el n-**símplice canónico**, Δ^n, como la envoltura convexa de $\{e_0, \dots, e_n\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

1.1 Los grupos de Homología Singular

Definición 1.1 (n-símplice canónico)

*Definimos el n-**símplice canónico**, Δ^n, como la envoltura convexa de $\{e_0, \ldots, e_n\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Idea: Encontraremos agujeros n-dimensionales si podemos encontrar combinaciones de n-símplices en X sin borde que no conformen el borde de ningún $(n+1)$-símplice.

Fijamos X un espacio topológico arbitrario.

Definición 1.2 (Grupo de Cadenas Singulares)

Para $n \geq 1$, *definimos* $\mathcal{C}_n(X)$, *el* **grupo de** n**-Cadenas Singulares**, *como el grupo libre abeliano generado por todos los* n*-símplices singulares, es decir, las aplicaciones*

$$\sigma : \Delta^n \to X.$$

En $n = -1$ *definimos* $\mathcal{C}_{-1}(X)$ *como el grupo nulo.*

Fijamos X un espacio topológico arbitrario.

Definición 1.2 (Grupo de Cadenas Singulares)

Para $n \geq 1$, definimos $\mathcal{C}_n(X)$, el **grupo de n-Cadenas Singulares**, *como el grupo libre abeliano generado por todos los n-símplices singulares, es decir, las aplicaciones*

$$\sigma : \Delta^n \to X.$$

En $n = -1$ definimos $\mathcal{C}_{-1}(X)$ como el grupo nulo.

Definición 1.3 (Cara i-ésima $(n-1)$-dimensional)

La **i-ésima cara** *$(n-1)$-dimensional de Δ^n es la aplicación continua $\epsilon_i^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ dada por*

$$\epsilon_i^n(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_n).$$

Definición 1.4 (Operador borde)

Definimos $\partial_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ *en los* n*-símplices singulares como*

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \epsilon_i^n$$

y en el caso $n = 0$ *definimos* $\partial_0 := 0$.

Definición 1.4 (Operador borde)

Definimos $\partial_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ *en los* n*-símplices singulares como*

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \epsilon_i^n$$

y en el caso $n = 0$ *definimos* $\partial_0 := 0$.

Proposición 1.1

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0.$$

Definición 1.4 (Operador borde)

Definimos $\partial_n : \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ *en los* n*-símplices singulares como*

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \epsilon_i^n$$

y en el caso $n = 0$ *definimos* $\partial_0 := 0$.

Proposición 1.1

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0.$$

Definición 1.5 (n-ésimo grupo de Homología Singular)

$$H_n(X) := \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

De esta definición obtenemos:

De esta definición obtenemos:

- Los grupos de Homología son invariantes por homeomorfismo.

De esta definición obtenemos:

- Los grupos de Homología son invariantes por homeomorfismo.
- Si X es unipuntual, $H_n(X) = 0$ en $n \geq 1$ y $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

De esta definición obtenemos:

- Los grupos de Homología son invariantes por homeomorfismo.
- Si X es unipuntual, $H_n(X) = 0$ en $n \geq 1$ y $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.
- Si $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ (descomposición en componentes conexas por caminos), tenemos

$$H_0(X) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z},$$

$$H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha).$$

1.2 Aplicaciones inducidas en la Homología

Definición 2.1 (Homomorfismo inducido en la Homología)

Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, definimos el **homomorfismo inducido en la Homología** $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ *como:*

$$f_* \left[\sum_i n_i \sigma_i \right] := \left[\sum_i n_i f \circ \sigma_i \right].$$

La Homología tiene el siguiente carácter funtorial:

- Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
- $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$.

La Homología tiene el siguiente carácter funtorial:

- Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
- $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$.

Además:

Teorema 2.1 (Invariancia por homotopía de la Homología)

Si $f \sim g$, entonces $f_* = g_*$

La Homología tiene el siguiente carácter funtorial:

- Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, entonces $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
- $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$.

Además:

Teorema 2.1 (Invariancia por homotopía de la Homología)

Si $f \sim g$, entonces $f_* = g_*$

Corolario 2.1

Los grupos de Homología son invariantes por el Tipo de Homotopía.

1.3 Homología Relativa

Definición 3.1 (Grupos de Homología Relativa)

Sea $A \subseteq X$. Los grupos de Homología Relativa son los grupos de Homología de las Cadenas Relativas, es decir,

$$\dots \xrightarrow{[\partial_{n+1}]} \mathcal{C}_n(X)/\mathcal{C}_n(A) \xrightarrow{[\partial_n]} \mathcal{C}_{n-1}(X)/\mathcal{C}_{n-1}(A) \xrightarrow{[\partial_{n-1}]} \dots$$

$$H_n(X, A) := \operatorname{Ker}[\partial_n] / \operatorname{Im}[\partial_{n+1}].$$

Teorema 3.1 (Secuencia exacta de la Homología Relativa)

Sea $A \subseteq X$ un subespacio. Los grupos de Homología encajan en una secuencia exacta larga:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, "\partial_*"] \\
H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] & H_n(X, A) \arrow[dll, "\partial_*"] \\
H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-1}(X) \arrow[r, "j_*"] & H_{n-1}(X, A) \arrow[dll, "\partial_*"] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}
$$

1.4 Secuencia exacta de Mayer-Vietoris

Teorema 4.1 (Secuencia exacta de Mayer-Vietoris)

Si X es la unión de los interiores de dos subespacios A, B, los grupos de Homología encajan en una secuencia exacta larga:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, "\partial_*"'] \\
H_n(A\cap B) \arrow[r, "\Phi_*"] & H_n(A)\oplus H_n(B) \arrow[r, "\Psi_*"] & H_n(X) \arrow[dll, "\partial_*"'] \\
H_{n-1}(A\cap B) \arrow[r, "\Phi_*"] & H_{n-1}(A)\oplus H_{n-1}(B) \arrow[r, "\Psi_*"] & H_{n-1}(X) \arrow[dll, "\partial_*"'] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

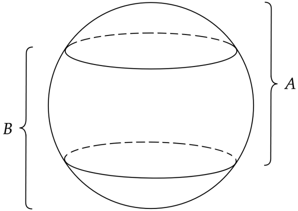
Ejemplo 4.1

$$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}, \;\; n \geq 1$$

Ejemplo 4.1

$$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}, \;\; n \geq 1$$

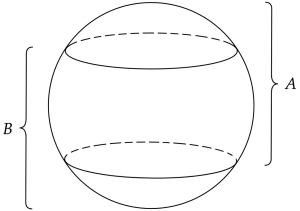
Sean $A := S^n \cap \{x_{n+1} \geq -\frac{1}{2}\}$, $B := S^n \cap \{x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\}$.



Ejemplo 4.1

$$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}, \quad n \geq 1$$

Sean $A := S^n \cap \{x_{n+1} \geq -\frac{1}{2}\}$, $B := S^n \cap \{x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\}$.



Entonces:

- A, B son homeomorfos a B^n.
- $A \cap B$ es del mismo Tipo de Homotopía que S^{n-1}.

- En el caso $n = 0$, es claro que $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- En el caso $n = 1$, tomamos la secuencia:

$$0 \xrightarrow{\Psi_*} H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(S^0) \xrightarrow{\Psi_*} H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{\Phi_*} H_0(S^1) \to 0$$

$$0 \to H_1(S^1) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0,$$

es decir, $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
- En $n \geq 2$, tenemos

$$0 \to H_n(S^n) \to H_{n-1}(S^{n-1}) \to 0,$$

es decir, $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

2. Homología Celular

2. Homología Celular

Objetivo: Obtener una manera más sencilla de calcular los grupos de Homología Singular restringiendo la clase de espacios a estudiar.

2.1 CW Complejos

Definición 1.1 (CW-Complejo)

Un CW-complejo es un espacio topológico X Hausdorff junto a una familia de aplicaciones $\Phi_\alpha : \Delta^n_\alpha \to X$ llamadas aplicaciones características, satisfaciendo las propiedades:

2.1 CW Complejos

Definición 1.1 (CW-Complejo)

Un CW-complejo es un espacio topológico X Hausdorff junto a una familia de aplicaciones $\Phi_\alpha : \Delta^n_\alpha \to X$ llamadas aplicaciones características, satisfaciendo las propiedades:

- *La restricción de Φ_α define un homeomorfismo entre $\mathring{\Delta}^n_\alpha$ y su imagen.*

2.1 CW Complejos

Definición 1.1 (CW-Complejo)

Un CW-complejo es un espacio topológico X Hausdorff junto a una familia de aplicaciones $\Phi_\alpha : \Delta^n_\alpha \to X$ llamadas aplicaciones características, satisfaciendo las propiedades:

- *La restricción de Φ_α define un homeomorfismo entre $\mathring{\Delta}^n_\alpha$ y su imagen.*
- *Las células abiertas ($e_\alpha := \Phi_\alpha(\mathring{\Delta}^n_\alpha)$) recubren X y su topología es coherente con la de X, esto es, F es cerrado en X si y sólamente si $F \cap \overline{e}_\alpha$ es cerrado para cada α.*

2.1 CW Complejos

Definición 1.1 (CW-Complejo)

Un CW-complejo es un espacio topológico X Hausdorff junto a una familia de aplicaciones $\Phi_\alpha : \Delta_\alpha^n \to X$ llamadas aplicaciones características, satisfaciendo las propiedades:

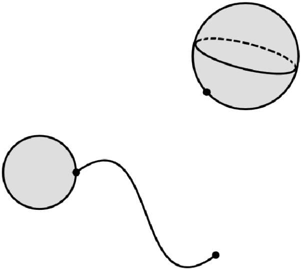
- *La restricción de Φ_α define un homeomorfismo entre $\mathring{\Delta}_\alpha^n$ y su imagen.*
- *Las células abiertas ($e_\alpha := \Phi_\alpha(\mathring{\Delta}_\alpha^n)$) recubren X y su topología es coherente con la de X, esto es, F es cerrado en X si y sólamente si $F \cap \overline{e}_\alpha$ es cerrado para cada α.*
- *$\Phi_\alpha(\partial\Delta_\alpha^n)$ está contenido en una unión finita de células de dimensión estrictamente menor que n para cada α.*

Definición 1.2 (n-esqueleto)

X^n, el n-esqueleto, es la unión de todas las células de dimensión menor o igual que n.

Definición 1.2 (n-esqueleto)

X^n, el n-esqueleto, es la unión de todas las células de dimensión menor o igual que n.



2.2 Los grupos de Homología Celular

Definición 2.1 (Grupo de las Cadenas Celulares)

$$\mathcal{C}_n^{\,CW}(X) := H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{\Phi_\alpha:\Delta^n\to X^n} \mathbb{Z}_\alpha$$

2.2 Los grupos de Homología Celular

Definición 2.1 (Grupo de las Cadenas Celulares)

$$\mathcal{C}_n^{CW}(X) := H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{\Phi_\alpha : \Delta^n \to X^n} \mathbb{Z}_\alpha$$

Definición 2.2 (Borde Celular)

Definimos el n-ésimo operador borde celular

$$\mathrm{d}_n : \mathcal{C}_n^{CW}(X) \to \mathcal{C}_{n-1}^{CW}(X)$$

como la composición

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

es decir,

$$\mathrm{d}_n[\Phi_\alpha] := [\partial \Phi_\alpha].$$

Proposición 2.1

$$\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0.$$

Proposición 2.1

$$\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0.$$

Definición 2.3 (Grupos de Homología Celular)

$$H_n^{CW}(X) := \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}_\mathrm{n} \,/\, \mathrm{Im}\, \mathrm{d}_{\mathrm{n+1}}\,.$$

Proposición 2.1

$$\mathrm{d}_n \circ \mathrm{d}_{n+1} = 0.$$

Definición 2.3 (Grupos de Homología Celular)

$$H_n^{CW}(X) := \mathrm{Ker}\,\mathrm{d_n} \,/\, \mathrm{Im}\,\mathrm{d_{n+1}}\,.$$

Teorema 2.1

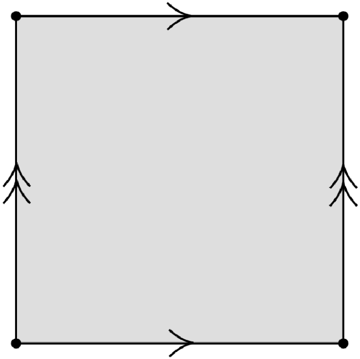
Existe un isomorfimso natural

$$\lambda : H_n^{CW}(X) \to H_n(X).$$

2.3 Un ejemplo

Ejemplo 3.1 (La Homología del Toro)

Dotamos a $T = S^1 \times S^1$ de la estructura de CW-complejo mostrada en la imagen:



Tenemos las cadenas celulares

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{d}_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \mathbb{Z} \to 0.$$

Como $\mathrm{d}_i = 0$ (como podemos comprobar usando teoría del grado), tenemos que la Homología Celular (y por tanto Singular) coincide con las cadenas celulares, esto es $H_0(T) \cong H_2(T) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. Aplicaciones

3.1 La característica de Euler-Poincaré

Definición 1.1 (Característica de Euler Poincaré)

Sea X un CW-complejo con finitas células, esto es, compacto. Definimos su característica de Euler-Poincaré como la suma alternada

$$\mathcal{X}(X) := \sum_i (-1)^i \alpha_i,$$

siendo α_i el número de i-células.

3.1 La característica de Euler-Poincaré

Definición 1.1 (Característica de Euler Poincaré)

Sea X un CW-complejo con finitas células, esto es, compacto. Definimos su característica de Euler-Poincaré como la suma alternada

$$\mathcal{X}(X) := \sum_i (-1)^i \alpha_i,$$

siendo α_i el número de i-células.

Ejemplo 1.1

La esfera S^n con la estructura de CW-complejo de una 0-célula y una n-célula tiene característica

$$\mathcal{X}(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

Definición 1.2 (Números de Betti)

Sea X un CW-complejo compacto. Denotamos por $\beta_n < \infty$, el n-ésimo número de Betti de X, como el rango del grupo abeliano finitamente generado $H_n(X)$.

Definición 1.2 (Números de Betti)

Sea X un CW-complejo compacto. Denotamos por $\beta_n < \infty$, el n-ésimo número de Betti de X, como el rango del grupo abeliano finitamente generado $H_n(X)$.

Teorema 1.1

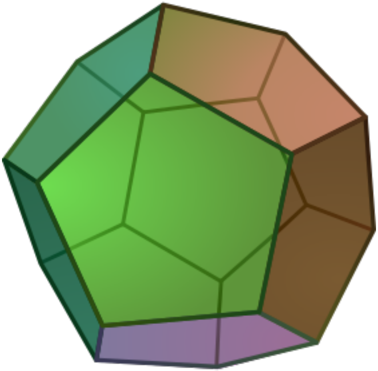
Sea X un CW-complejo compacto, tenemos

$$\mathcal{X}(X) = \sum_i (-1)^i \beta_i.$$

En particular, la característica de Euler-Poincaré es un invariante por el Tipo de Homotopía.

En el caso particular de S^2, obtenemos el invariante algebraico más antiguo, la característica de Euler:

$$V - A + C = \mathcal{X}(S^2) = 2.$$



3.2 Otros teoremas clásicos

La Homología es una herramienta muy potente y con ella se pueden demostrar los siguientes Teoremas (entre otros):

- Teorema del punto fijo de Brouwer.
- Teorema de la curva de Jordan.
- S^{2n} no admite campos tangentes nunca nulos.
- Teorema de Borsuk-Ulam.

¡Muchas gracias!

¡Muchas gracias!

¿Alguna pregunta?